מבחן מיון במתמטיקה, 17.4.2015

מספר נקודות אפשרי: 135. ציון עובר הוא 70 ומעלה. ענו על הטופס.

1. חשבו את הגבולות הבאים. אם הגבול לא קיים, הסבירו מדוע:

(א) (5%) $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(a+h)-\ln a}{3h}$

פתרון: על פי הגדרת הנגזרת $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(a+h)-\ln a}{h}$ היא הנגזרת של $\ln x$ בנקודה $x=a$, שהיא $\frac{1}{a}$. בתרגיל מופיע גם 3 במכנה, ולכן התשובה היא $\frac{1}{3a}$ (השתמשנו כאן בחוק שאם ביטוי שואף ל־L, הביטוי כפול קבוע c שואף ל־cL).

אפשר גם לחשב על פי לופיטל.

(ב) (5%) $\lim_{x\to\infty}(|\sin x|)^{\frac{1}{1+x^2}}$

פתרון: בנקודות $x=\pi n$ הביטוי הוא 0. בנקודות $x=2\pi n+\frac{\pi}{2}$ הביטוי הוא 1. שתי הסדרות, πn ו־$2\pi n+\frac{\pi}{2}$, שואפות לאינסוף, ובשתיהן הביטוי שואף לגבולות שונים. לכן הגבול לא קיים.

(ג) (5%) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{e^x})^{e^x}$

פתרון: ידוע ש־ $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ (זוהי ההגדרה של המספר e). הציבו בגבול שנתון בשאלה $t=e^x$, ואז הגבול שווה ל־$\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t$, שגם הוא כמובן e. הסבירו לעצמכם מדוע בהצבה $t=e^x$ מתקיים $t\to\infty$ כאשר $x\to\infty$.

(ד) (5%) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+100}-\sqrt{x}$

פתרון: משתמשים בטריק המוכר של "כפל בצמוד":

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+100}-\sqrt{x} =$$
$$\lim_{x\to\infty}[(\sqrt{x+100}-\sqrt{x})(\sqrt{x+100}+\sqrt{x})] : (\sqrt{x+100}+\sqrt{x}) =$$
$$\lim_{x\to\infty}[x+100-x] : (\sqrt{x+100}+\sqrt{x}) =$$
$$\lim_{x\to\infty}100 : (\sqrt{x+100}+\sqrt{x}) = 0$$

2. (5%) כתבו אי שוויון שקבוצת המספרים שמקיימים אותו היא $[3,4]\cup[5,6]$.
תזכורת: $A\cup B$ הוא האיחוד של שתי הקבוצות A ו־B.

פתרון: $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)\leq 0$ **- ציירו את הגרף של הפולינום והיווכחו מדוע זה כך.**

3. (5%) מצאו פונקציה שתחום העליה שלה הוא בדיוק $[3,4]\cup[5,6]$.

פתרון: קחו פונקציה שהנגזרת שלה היא $-(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ **- לפי השאלה הקודמת הנגזרת אי שלילית בדיוק בקבוצה האמורה.**

4. (5%) כתבו פונקציה $f(x)$ שמוגדרת לכל x חיובי,
$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ ו־$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$.

פתרון: $f(x)=\sqrt{x}$**, או** $f(x)=\ln x$

5. (5%) כתבו פונקציה $f(x)$ שמוגדרת לכל x ממשי, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ו־$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

(שימו לב ־ אם פתרתם את ב' אין צורך לפתור את א', תקבלו את הניקוד גם על א'.)

פתרון: $f(x) = \sqrt{|x|}$

6. (5%) מצאו פונקציה $f(x)$ שעבורה $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ קיים, ו־$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ לא קיים.

תתקבל רק תשובה שמכילה נוסחה אחת, ולא חלוקה למקרים.

פתרון: $e^{-1/x}$**, או** $\sin\frac{1}{x}e^{-1/x}$

7. (5%) מצאו פונקציה $f(x)$ ש־ $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$ ו־$f(e) = 10$.

פתרון: זהו האינטגרל $\int \frac{\ln x}{x}dx$**, שהוא** $\frac{(\ln|x|)^2}{2} + C$**. איך מוצאים זאת? שמים לב לכך ש־**$\frac{1}{x}$ **הוא הנגזרת של** $\ln x$**, ומשתמשים בהצבה** $t = \ln x$**. אבל הכי טוב ־ גזרו את** $\frac{(\ln|x|)^2}{2} + C$ **על פי חוק השרשרת והיווחכו שהנגזרת היא מה שצריך ־ מזה תבינו מהי "שיטת ההצבה".**

כדי למצוא את C משתמשים בנתון: $\frac{(\ln|e|)^2}{2} + C = 10$**, כלומר** $\frac{1}{2} + C = 10$**, אם כן** $C = 9.5$**.**

8. תהא $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

א. (5%) כתבו נוסחה לפונקציה ההפוכה לה:

$$f^{-1}(y) = ...$$

פתרון: נסמן $y = \sin(x+\frac{\pi}{2})$. אזי $x+\frac{\pi}{2} = \arcsin y$, ולכן $x = \arcsin y - \frac{\pi}{2}$, כלומר $f^{-1}(y) = \arcsin y - \frac{\pi}{2}$.

מיטיבי לכת יודעים בוודאי ש־ $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$, מה שמפשט את השאלה.

ב. (5%) חשבו את הנגזרת של הפונקציה ההפוכה בנקודה בה $x=0, y=1$.

פתרון:

בנקודה הזאת הנגזרת של הפונקציה (ראו "למיטיבי לכת" בשאלה הקודמת) היא $(\cos x)'$ בנקודה $x=0$, שהיא $\sin 0$, שהיא 0. הנגזרת של הפונקציה ההפוכה היא 1 חלקי הנגזרת של הפונקציה המקורית, כלומר $1/0$, כלומר היא לא מוגדרת.

9. תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ שאינה פולינום והמקיימת את שלושת התנאים הבאים:

א. $f(0) = 1$

א. $f'(0) = 2$

ב. $f''(0) = 3$

פתרון: אם רוצים לעשות זאת בצורה שיטתית, מוצאים תחילה פולינום שעושה זאת: $1+2x+\frac{3}{2}x^2$ (חישבו מדוע זה עובד.) כדי שהתשובה לא תהיה פולינום, הוסיפו פונקציה שמתאפסת ונגזרותיה הראשונה והשנייה מתאפסות בנקודה 0. למשל, $\sin(x^3)$. אם כן, $f(x) = 1+2x+\frac{3}{2}x^2+\sin(x^3)$ עובדת.

דרך אחרת היא לכתוב למשל $f(x) = e^x+a+bx+cx^2$, ולמצוא את a, b, c שמקיימים את התנאים.

10. (5%) חשבו את הממוצע של המספרים $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$.

פתרון: סכום המספרים בסדרה הוא $2047 = 2048-1$, ומספרם הוא 11. אם כן הממוצע הוא $\frac{2047}{11}$.

11. (5%) חשבו את הממוצע של המספרים $1, 2, 4, \ldots, 2^n$ (התשובה תינתן כפונקציה של n).

פתרון: $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

12. (5%) פתרון אחד של המשוואה $x^2 + 157x = 1670$ הוא $x = 10$. מהו הפתרון השני?

פתרון: כתבו את המשוואה כ: $x^2 + 157x - 1670 = 0$. לפי נוסחאות ויאטה, מכפלת השורשים היא האיבר החופשי, -1670, ולכן הפתרון השני הוא -167.

אם אתם רוצים לדעת מדוע נוסחת ויאטה נכונה, שימו לב שהפונקציה היא $x^2+157x-1670 = (x-10)(x+167)$ - האם אתם רואים מדוע זוהי הפונקציה הריבועית עם מקדם ראשון 1, שפתרונותיה הם 10 ו־-167?

13. (5%) תנו דוגמה למשוואה ממעלה שלישית שיש לה בדיוק שני פתרונות.

פתרון: $x^2(x-1) = 0$ - הכוונה כמובן לשני פתרונות ממשיים שונים.

14. (5%) מצאו פולינום $p(x)$ ש־$x^7 + 1 = p(x)(x+1)$

פתרון: $p(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. אפשר על ידי חלוקת פולינומים, ואפשר על ידי ידיעת הסכום של הסדרה הגיאומטרית $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, שאם קוראים אותה מימין לשמאל היא סדרה עם מנה $-x$.

15. (5%) תנו דוגמה לפולינום $p(x)$ ממעלה כלשהי שיש לו שורשים $1,2,3$, והוא מקיים $p'(1)=7$.

פתרון: הפולינום הוא מן הצורה $p(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$. **לפי כלל הגזירה של מכפלה הנגזרת של הפולינום הזה היא** $p'(x)=a[(x-2)x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)]$ **ולכן** $p'(1)=2a$, **אם כן** $a=\frac{7}{2}$.

16. (5%) מצאו פונקציה $f(x)$ ש־ $f'(x)=\frac{x+1}{x^2+4}$ לכל x.

כמה פונקציות כאלה יש?

פתרון: צריך לחשב $\int\frac{x+1}{x^2+4}dx$. **נפרק זאת:**

$$\int\frac{x}{x^2+4}dx=\ln(x^2+4)/2$$

־ שוב, שיטת ההצבה, גזרו את אגף ימין כדי להיווכח מדוע זה עובד.

כדי לחשב את החלק השני נחלק מונה ומכנה ב־4**:**

$$\int\frac{1}{x^2+4}dx=\int\frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}dx=$$

$$\frac{1}{4}\arctan(\frac{x}{2})\times 2$$

הכפל האחרון ב־2 **נועד לבטל את הנגזרת הפנימית שמופיעה כי ה־**$\arctan$ **נלקח מ־**$\frac{x}{2}$**.**

התשובה הסופית לחלק הזה היא:

$$\frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})$$

וביחד

$$\ln(x^2+4)/2+\frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})$$

17. חשבו:

א. (5%) $\ln_{e^5} e^3$

פתרון: $\frac{3}{5}$

ב. (5%) $\frac{log_{10}e}{log_{100}e^2}$

פתרון: $log_{100}e^2 = \log_{10} e$. **כדי לראות זאת, סמנו** $\log_{10} e = p$. **אז** $10^p = e$. **ואז** $100^p = (10^2)^p = 10^{2p} = (10^p)^2 = e^2$. **הכלל הוא - בביטוי** $\log_a b$**, כאשר מעלים את** a **בחזקה** t **הלוגריתם קטן פי** t. **כאשר מעלים את** b **בחזקה** t **הלוגריתם גדל פי** t. **כאן שני הדברים קרו.**

התשובה היא לכן 1.

18. (5%) רשמו את הביטוי $x^2 + 5x - 1$ בצורה $a(x+b)^2 + c$.

פתרון: $(x + \frac{5}{2})^2 - (1 + \frac{25}{4})$. **זוהי "השלמה לריבוע". כך פותרים את המשוואה הריבועית** $x^2 + 5x - 1 = 0$.

19. א. (5%) חשבו את המכפלה של כל שורשי המשוואה $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

פתרון: $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2+1)(x+1)$ **ולכן שורשי המשוואה הם** $i, -i, -1$.
דרך יותר אלגנטית: $x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^4-1}{x-1}$**, ולכן פתרונות המשוואה הם שורשי היחידה הרביעיים, מחוץ ל־**1.

המכפלה היא אם כן -1.

כדאי לזכור ששורש יחידה x מסדר k מקיים $1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1} = 0$. זוהי עובדה שפוגשים בה לפעמים.

ב. (5%) חשבו את הסכום של השורשים האלו.

פתרון: -1

20. תהא $f(x) = \ln(\arctan(2x+5))$. מהי הפונקציה ההפוכה לה?

פתרון: נסמן $f(x) = y$. אזי $\arctan(2x+5) = e^y$, ואם כן $2x+5 = \tan(e^y)$, ואם כן $2x = \tan(e^y) - 5$, ואם כן $x = \frac{\tan(e^y)-5}{2}$. הפונקציה ההפוכה היא אם כן: $f^{-1}(y) = \frac{\tan(e^y)-5}{2}$. אם רוצים לכתוב אותה עם משתנה x אז:

$$f^{-1}(x) = \frac{\tan(e^x) - 5}{2}$$

21. (5%) תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ שמקיימת את שלושת התנאים הבאים:

א. השטח בין הגרף $y = f(x)$ לבין ציר x בין הערכים $x = 0$ ו־$x = 7$ הוא 10

ב. $f'(0) = 1$

ג. $f(1) = 3$

התשובה צריכה להינתן בנוסחה אחת.

פתרון: יש שלושה תנאים שהפונקציה צריכה לקיים. נכתוב פונקציה עם שלושה פרמטרים, ונחפש מהם הפרמטרים. הכי פשוט ־ פולינום. כלומר נבחר $f(x) = ax^2 + bx + c$. התנאים שצריכים להתקיים הם:

א. $a \times 7^3/3 + b \times 7^2/2 + c \times 7 = 10$

ב. $b = 1$.

ג. $a + b + c = 3$.

צריך לפתור את מערכת המשוואות הזאת, שהיא בעצם מערכת של שתי משוואות בשני הנעלמים a, c (משום ש־b ידוע).

22. (5%) תהא α זווית ברביע הראשון. נגדיר $u = \sin\alpha\cos\alpha$, ו־$v = \cot\alpha$. כתבו את v כפונקציה של u.

הערה: זוהי שאלה שלקוחה מתרגילי המתנט.

פתרון: מספיק לכתוב את $\sin\alpha$ כפונקציה של u. נסמן $t = (\sin\alpha)^2$. אזי $u^2 = t(1-t)$, כלומר $t^2 - t + u^2 = 0$. פתרו את המשוואה הזאת ותקבלו ביטוי ל־t.

23. (5%) מצאו שני וקטורים שווי אורך במישור, $\vec{u}$ ו־$\vec{v}$ המקיימים: $\vec{u} + \vec{v} = (2,3)$ ו־$\vec{u} \perp \vec{v}$ (כלומר, הם ניצבים).

פתרון: נסמן $\vec{u} = (x,y)$. אזי $\vec{v} = (2,3) - (x,y) = (2-x, 3-y)$. שתי המשוואות שמקבלים הן:

$$x^2 + y^2 = (2-x)^2 + (3-y)^2$$

(שוויון אורך)

$$x(2-x)+y(3-y)=0$$

(ניצבות)

המשוואה הראשונה היא ליניארית (מדוע) - אם כן קל לפתור.

דרך אחרת: הוקטור (x,y) יוצר זווית 45 מעלות עם $(2,3)$ (ציירו את הוקטורים והבינו מדוע), ואורכו הוא $\frac{\|(2,3)\|}{\sqrt{2}}$ (הסיבה: הוקטור $(2,3)$ הוא האלכסון של ריבוע שצלעותיו $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$ - ציירו והיווכחו).