מבחן סיווג במתמטיקה 17.10.18

פתרון

שאלה 1: נתונה $f(x)=5\arctan x$. איזו מהטעונות הבאות נכונה?
א. $f(x)$ חסומה מלמעלה על יד 10.
ב. $f(x)$ חסומה מלמעלה על ידי 5.
ג. $f(x)$מונוטונית יורדת על כל הישר הממשי.
ד. $\lim_{x\to\infty} f(x)=5$.
ה. $\lim_{x\to\infty} f(x)=-5$

פתרון: נעבור על הטענות:

$$\lim_{x\to\infty} 5\arctan x = 5\lim_{x\to\infty}\arctan x = 5\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi$$

לכן סעיפים ד' ו־ה' לא נכונים. בנוסף, $\frac{\pi}{2}>1$ ולכן $\frac{5}{2}\pi>5$, כלומר $f(x)$ לא חסומה מלמעלה על ידי 5 ו־ב' נפסל.
$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$ לכל x לכן $f(x)$מונוטונית עולה, כלומר ג, נפסל גם.
כיוון ש־ $f(x)$מונוטונית עולה ו־$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{5}{2}\pi<10$ אז $f(x)$ חסומה מלמעלה על ידי 10, כלומר א' תשובה נכונה.

שאלה 2: אם x ו־y הם מספרים ממשיים המקיימים $\frac{4^x}{2^{x+y}}=8$ ו־$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}}=243$ אז המכפלה $x\cdot y$ שווה ל:

פתרון: נפשט את המשוואות:

$$\frac{4^x}{2^{x+y}}=8\Rightarrow 2^{2x-x-y}=2^{x-y}=2^3\Rightarrow x-y=3$$

$$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}}=243\Rightarrow 3^{2(x+y)-5y}=3^{2x-3y}=3^5\Rightarrow 2x-3y=5$$

נכפול את המשוואה הראשונה ב־2 ונחסר ממנה את השניה: $y=1$ ו־$x=4$ ומכפלתם $x\cdot y=4$.

שאלה 3: נתונה סדרה $\log_{10} x, \log_{10} \frac{x}{y}, \ldots, \log_{10} \frac{x}{y^{n-1}}$. חשבו את סכום שבעת האיברים הראשונים של הסדרה אם נתון ש־ $x = 270$ ו־$y = 3$.

פתרון: הסדרה הנתונה היא

$$\log_{10} x, \log_{10} x - \log_{10} y, \ldots, \log_{10} x - \log_{10} y^{n-1} = \log_{10} x - (n-1) \log_{10} y$$

כלומר זוהי סדרה חשבונית עם $a_1 = \log_{10} x$ והפרש $d = -log_{10}y$. לכן

$$S_7 = \frac{7\left(a_1 + a_7\right)}{2} = \frac{7\left(\log_{10} 270 + \log_{10} \frac{270}{3^6}\right)}{2} = \frac{7\left(\log_{10} \frac{270^2}{3^6}\right)}{2} = \frac{7\left(\log_{10} 10^2\right)}{2} = 7$$

שאלה 4: בסדרה הנדסית ארבעה איברים. האיבר השלישי גדול ב־ 9 מן האיבר הראשון, והאיבר השני גדול ב־18מן האיבר הרביעי. סכום אברי הסדרה הוא:

פתרון: נסמן ב־ a_1 את האיבר הראשון בסדרה וב־ q את מנת הסדרה. על פי הנתון מתקיים:

$$a_3 - a_1 = 9 \Rightarrow a_1 q^2 - a_1 = 9$$

$$a_2 - a_4 = 18 \Rightarrow a_1 q - a_1 q^3 = 18 \Rightarrow -q\left(a_1 q^2 - a_1\right) = 18$$

הביטוי שבסוגריים הוא בעצם הבנתון הראשון ולכן $-9q = 18$ ולכן $q = -2$.
נציב במשוואה הראשונה ונקבל $4a_1 - a_1 = 3a_1 = 9$ ולכן $a_1 = 3$.
אברי הסדרה הם $3, -6, 12, -24$ וסכומם הוא -15.

שאלה 5: מהם ערכי x שעבורם מתקיים $\log_{10}\left(\log_{10} x\right) < 0$

פתרון: כדי שיתקיים $\log_{10}\left(\log_{10} x\right) < 0$, צריך להתקיים $0 < \log_{10} x < 1$ וזה יקרה אם $1 < x < 10$.

שאלה 6: מספר הפתרונות של המשוואה $\frac{3x^2-15x}{x^2-5x} = x - 2$ הוא:

פתרון: קודם כל, תחום ההגדרה של המשוואה הוא $x \neq 0, 5$. נפתור את המשוואה:

$$\frac{3x^2 - 15x}{x^2 - 5x} = x - 2$$

$$x\left(3x - 15\right) = x\left(x - 5\right)\left(x - 2\right) = x\left(x^2 - 7x + 10\right)$$

$$0 = x\left(x^2 - 7x + 10 - 3x + 15\right) = x\left(x^2 - 10x + 25\right) = x\left(x - 5\right)^2$$

לכן הפתרונות של המשוואה הם $0, 5$ אבל הם לא בתחום ההגדרה ולכן מספר הפתרונות של המשוואה הוא 0.

שאלה 7: סכום כל הפתרונות הממשיים של המשוואה $(x-2)\left(x^4-13x^2+40\right) = 0$ הוא:

פתרון: נסמן $t=x^2$. השורשים של המשוואה $t^2-13t+40=0$ הם $5,8$ ולכן הפתרונות של המשוואה המקורית הם: $2,\sqrt{5},-\sqrt{5},\sqrt{8},-\sqrt{8}$ וסכומם הוא 2.

שאלה 8: אוסף כל הפתרונות של אי השוויון $\left|\frac{x-3}{x+1}\right| \geq 3$ הוא:

פתרון: נפריד לשני מקרים:

מקרה 1:

$$\frac{x-3}{x+1} \geq 3 \iff \frac{x-3-3(x+1)}{x+1} = \frac{-2x-6}{x+1} = -2\frac{x+3}{x+1} \geq 0$$

זה קורה אם"ם $x \in [-3.-1)$.

מקרה 2:

$$\frac{x-3}{x+1} \leq -3 \iff \frac{x-3+3(x+1)}{x+1} = \frac{4x}{x+1} \leq 0$$

זה קורה אם"ם $x \in (-1,0]$.

לכן אוסף הפתרונות של אי השוויון הוא $[-3,-1)\cup(-1,0]$.

שאלה 9: נתונים וקטורים $\bar{u},\bar{v}$ המקיימים $|\bar{u}|=4$, $|\bar{v}|=3$ והזווית בין u,v היא 120^0. מצאו את $\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית בין הווקטורים $\bar{u}$ ו־$\bar{w}=\frac{3}{2}\bar{u}+2\bar{v}$.

פתרון: נחשב את $|\bar{w}|$:

$$|\bar{w}|^2 = \left(\frac{3}{2}\bar{u}+2\bar{v}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\bar{u}+2\bar{v}\right) = \frac{9}{4}|\bar{u}|^2+6\bar{u}\cdot\bar{v}+4|\bar{v}|^2 = \frac{9}{4}\cdot16+6\cdot3\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot9 = 36$$

לכן $|\bar{w}|=6$. לכן

$$\cos\alpha = \frac{\bar{w}\cdot\bar{u}}{|\bar{w}|\,|\bar{u}|} = \frac{\left(\frac{3}{2}\bar{u}+2\bar{v}\right)\cdot\bar{u}}{6\cdot4} = \frac{\frac{3}{2}|u|^2+2\bar{v}\cdot\bar{u}}{24} = \frac{\frac{3}{2}\cdot16+2\cdot3\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{24} = \frac{1}{2}$$

שאלה 10:

הגבול $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ הוא:

פתרון:

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = \lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\left(\sqrt[4]{x}-2\right)\left(\sqrt[4]{x}+2\right)}\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt[4]{x}+2} = \frac{1}{4}$$

שאלה 11: אם $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$ אז הערך של $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$ הוא:

פתרון: מתקיים:

$$\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}=\frac{\left(25-x^2\right)-\left(15-x^2\right)}{\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}}=\frac{10}{2}=5$$

שאלה 12: נתונה $f\left(x\right)=x\left(\sqrt[3]{1+3x}\right)$. הנגזרת של $f\left(x\right)$ שווה ל־

פתרון:

$$f'\left(x\right)=\sqrt[3]{1+3x}+x\cdot\frac{1}{3}\left(1+3x\right)^{-2/3}\cdot3=\frac{1+3x+x}{\left(1+3x\right)^{2/3}}=\frac{4x+1}{\left(1+3x\right)^{2/3}}$$

שאלה 13: נתונה פונקציה $f\left(x\right)=kx^2+3x+2l$. איזו מהטענות הבאות נכונה לכל a,b ממשיים המקיימים $2k+l=3$?

א. לפונקציה יש לפחות שורש ממשי אחד.
ב. הפונקציה מתאפסת עבור 2 ערכים שונים.
ג. לפונקציה בהכרח יש מינימום.
ד. גרף הפונקציה משיק לציר ה־y.
גרף הפונקציה משיק לציר ה־x.

פתרון: נתון שמתקיים $l=3-2k$. כדי לדעת כמה שורשים יש לפונקציה נבדוק את הסימן של הדיסקרימיננטה:

$$\Delta=9-8kl=9-8k\left(3-2k\right)=9-24k+16k^2=\left(3-4k\right)^2\geq0$$

ולכן לפונקציה יש לפחות שורש ממשי אחד.

שאלה 14: אם $\log_{10}\frac{1}{a}=b-\log_{10}c$, אז ערכו של a הוא:

פתרון: מתקיים:

$$\frac{1}{a}=10^{\log_{10}\frac{1}{a}}=10^{b-\log_{10}c}=10^b\cdot10^{-\log_{10}c}=\frac{10^b}{c}$$

ולכן $a=\frac{c}{10^b}$.

שאלה 15: ערך k עבורות הנקודות

$$A=(3,5,-1)\,,B=(1,1,3)\,,C=\left(k^2+k,k^2+2,-7\right)$$

נמצאות על ישר אחד הוא:

פתרון: שלוש הנקודות נמצאות על אותו ישר אם"ם הוקטורים BC,BA מקבילים.

$$BA=(2,4,-4)\,,\quad BC=\left(k^2+k-1,k^2+1,-10\right)$$

לכן

$$\left(k^2+k-1,k^2+1,-10\right)=\alpha\,(2,4,-4)$$

לכן $-4\alpha=-10$ כלומר $\alpha=2.5$. נציב במשוואה ונקבל $k^2+1=2.5\cdot 4=10$, כלומר $k^2=9$ ולכן $k=\pm 3$.
בנוסף, מתקיים $k^2+k-1=2.5\cdot 2=5$ וזה קורה רק אם $k=-3$.

שאלה 16: נתונה פונקציה המקיימת $f'(5)=7$. אזי הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(4h+5)-f(5)}{8h}$ שווה ל:

פתרון:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4h+5)-f(5)}{8h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(4h+5)-f(5)}{4h}=\frac{1}{2}f'(5)=\frac{1}{2}\cdot 7=3.5$$

שאלה 17: השטח החסום ע"י הפונקציה $f(x)=(\sin x)(\sin 2x)$ וציר ה־x בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ הוא:

פתרון: הפונקציה חיובית בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ולכן השטח שווה ל־

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)(\sin 2x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 x\cos x dx=2\left.\frac{\sin^3 x}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

שאלה 18: מכפלת שורשי המשוואה $z^2-iz+2=0$ היא:

פתרון א': על פי נוסחת השורשים

$$z_{1,2}=\frac{i\pm\sqrt{-1-8}}{2}=\frac{i\pm 3i}{2}$$

ולכן השורשים הם $-i,2i$ ומכפלתם היא 2.

פתרון ב':

על פי נוסחאות וייטה מכפלת השורשים היא המקדם החופשי ששווה ל־2.

שאלה 19**:**

סכום המקדמים של הפולינום $(3-4x)^{242}+\left(4-3x^2\right)^{151}$ הוא:

פתרון: סכום המקדמים מתקבל מהצבת $x=1$ ואז נקבל:

$$(3-4\cdot 1)^{242}+\left(4-3\cdot 1^2\right)^{151}=(-1)^{242}+1^{151}=2$$

שאלה 20**:** משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f\left(x\right)=x^2-3x$ שמקביל לישר העובר דרך הנקודות $(1,1)\,,(2,4)$ היא:

פתרון:

שיפוע הישר שעובר דרך שתי הנקודות הוא $m=\frac{4-1}{2-1}=3$. צריך למצוא נקודה (x,y) על הפונקציה בה שיפוע המשיק הוא 3:
$f'\left(x\right)=2x-3=3$ ולכן $x=3$. נציב בפונקציה ונקבל $f\left(3\right)=0$. לכן משוואת המשיק היא $y-0=3\left(x-3\right)$, כלומר $y=3x-9$.