

מבחן סיווג במתמטיקה 24.3.22

פתרון

1. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x/2}$. נסמן ב- $f^{(n)}(0)$ את הנגזרת ה- n של $f(x)$ ב-0. חשבו את הסכום $f(0) + f'(0) + f''(0) + \dots + f^{(20)}(0)$.

פתרון: מתקיים:

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}, \quad f''(x) = \frac{1}{2^2}e^{x/2}, \quad f'''(x) = \frac{1}{2^3}e^{x/2}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n}e^{x/2}$$

לכן $f^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n}$. קיבלנו סדרה הנדסית שבו $a_1 = f(0) = 1$ ו- $q = \frac{1}{2}$.
לכן סכום 21 האיברים הראשונים של הסדרה הוא:

$$f(0) + f'(0) + f''(0) + \dots + f^{(20)}(0) = \frac{1 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

2. נתון שבמשולש ABC מתקיים: $AC = 2t$, $AB = 3$, $BC = 2$. כאשר $t > 0$. עבור אילו ערכי t המשולש ABC הוא קהה זווית?

פתרון: כיוון שהזווית הקהה נמצאת מול הצלע הגדולה במשולש לא ייתכן שהזווית הקהה תהיה הזווית $\angle A$ שנמצאת מול הצלע BC . נפריד לשני מקרים: מקרה ראשון: הזווית הקהה היא זווית $\angle C$ שנמצאת מול צלע AB .
לכן על משפט הקוסינוסים מתקיים:

$$9 = (AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 - 2(BC)(AC)\cos\angle C = 4 + 4t^2 - 4t\cos\angle C$$

לכן $\cos\angle C = \frac{4t^2-5}{4t} < 0$. כיוון ש- $t > 0$ נדרוש ש- $4t^2 - 5 < 0$ כלומר $-\frac{\sqrt{5}}{2} < t < \frac{\sqrt{5}}{2}$ ולכן סך הכל נקבל ש- $0 < t < \frac{\sqrt{5}}{2}$.
מקרה שני: הזווית הקהה היא $\angle B$ שנמצאת מול צלע AC .
לכן על פי משפט הקוסינוסים מתקיים:

$$4t^2 = (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC)\cos\angle B = 9 + 4 - 2 \cdot 6 \cos\angle B$$

לכן $\cos\angle B = \frac{13-4t^2}{12} < 0$. נדרוש: $13 - 4t^2 < 0$ כלומר $t > \frac{\sqrt{13}}{2}$ או $t < -\frac{\sqrt{13}}{2}$.
כיוון ש- $t > 0$ נקבל $t > \frac{\sqrt{13}}{2}$.
משני המקרים קיבלנו $0 < t < \frac{\sqrt{5}}{2}$ או $t > \frac{\sqrt{13}}{2}$.

3. חשבו $\sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k}$.

פתרון: על פי נוסחת הבינום של ניוטון מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} 1^k 1^{16-k} = (1+1)^{16} = 2^{16}$$

4. נתונה הטענה הבאה: "לכל $x > 0$ קיים y כך שלכל $z < y$ מתקיים $z > x$ או $z < -x$ ".

מבלי להתייחס לנכונותה או אי-נכונותה של הטענה, קבעו מי מבין הטענות הבאות היא שלילה של הטענה הנתונה.

פתרון: קיים $x > 0$ כך שלכל y קיים $z < y$ המקיים $z \leq x$ וגם $-z \leq x$.

5. נתונה סדרה הנדסית שמקיימת $a_1 = \sqrt{3} - i, a_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$. חשבו את a_9 .

פתרון: מתקיים

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i} = \frac{-2(1 - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)} = \frac{-2(\sqrt{3} + \sqrt{3} + (1 - 3)i)}{3 + 1} = -\sqrt{3} + i$$

לכן

$$\begin{aligned} a_9 &= a_1 q^8 = (\sqrt{3} - i) (-\sqrt{3} + i)^8 = (\sqrt{3} - i)^9 = \\ &= \left(2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^9 = 2^9 \operatorname{cis} \left(-\frac{9\pi}{6}\right) = 2^9 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^9 i \end{aligned}$$

6. נתון מספר מרוכב z המקיים $1 + |z| = |1 + z|$. מה ניתן להגיד בודאות על z ?

פתרון א: מתקיים

$$1 + 2|z| + |z|^2 = (1 + |z|)^2 = |1 + z|^2 = (1 + z)(1 + \bar{z}) = 1 + (z + \bar{z}) + z\bar{z} = 1 + 2\operatorname{Re}(z) + |z|^2$$

לכן $\operatorname{Re}(z) = |z|$. לכן אם נסמן $z = a + bi$ נקבל ש- $a = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ או $a^2 = a^2 + b^2$ כלומר $b^2 = 0$ לכן z מספר ממשי אי-שלילי.

פתרון ב: על פי אי-שוויון המשולש מתקיים $|1 + z| \leq |1| + |z| = 1 + |z|$ ושוויון מתקיים אם שני המספרים המרוכבים הם מייצגים וקטורים באותו כיוון לכן הזווית בין המספרים המרוכבים $1, z$ היא 0 , כלומר z מספר ממשי אי-שלילי.

7. תהי הטענה $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 + 10$. בחרו את הטענה הנכונה.

פתרון: באגף שמאל מופיע סכום של סדרה חשבונית ולכן מתקיים:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{(1 + (2n - 1))n}{2} = n^2$$

לכן לא קיים n טבעי כך ש- $n^2 = n^2 + 10$.
נבדוק האם מתקיים צעד האינדוקציה, כלומר בהנחה שהטענה נכונה עבור n נבדוק האם הטענה נכונה עבור $n + 1$:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 10 + 2n + 1 = (n + 1)^2 + 10$$

לכן צעד האינדוקציה מתקיים והתשובה הנכונה היא:
לא קיים n שמקיים את הטענה אבל מתקיים צעד האינדוקציה, כלומר מתקיים: אם הטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו אז היא גם נכונה עבור $n + 1$.

8. נתון ש- x_1, x_2, x_3 הם פתרונות של המשוואה $x^3 - 2x^2 - 6x + 2 = 0$.
חשבו את $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

פתרון: על פי נוסחת וייטה לסכום שורשי הפולינום מתקיים

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = \left(-\frac{-2}{1}\right)^2 = 4$$

9. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x + \ln(x^2 - 2)$. בחרו את הטענה הנכונה.

פתרון: תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x^2 - 2 > 0$, כלומר $x > \sqrt{2}$ או $x < -\sqrt{2}$.
נגזור את הפונקציה: $f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 - 2} = \frac{2x^2 - 4 + 2x}{x^2 - 2} = \frac{2(x^2 + x - 2)}{x^2 - 2} = \frac{2(x+2)(x-1)}{x^2 - 2}$.
בתחום ההגדרה יש נקודה חשודה לקיצון אחת והיא $x = -2$ והנגזרת מחליפה סימן מחיובי לשלילי ולכן $x = -2$ היא נק' מקסימום מקומי.

10. חשבו את הביטוי הבא:

$$\int \left(\frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} \right) dx + \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

פתרון:

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} \right) dx + \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{\sin x \cos x + \sin^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x| - \frac{1}{2} \ln (|\cos 2x|) + C = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{x}{\cos 2x} \right| \right) + C = \ln \left(\sqrt{\left| \frac{x}{\cos (2x)} \right|} \right) + C \end{aligned}$$

11. נתונים הישרים: $\ell_1 : x = y = \frac{z}{3}$, $\ell_2 : x - 1 = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$.
נתון שהמישור $Ax + By + 2z + D = 0$ מכיל את הישר ℓ_2 ומקביל לישר ℓ_1 .
חשבו את $A + B + D$.

פתרון: וקטור הכיוון של הישר ℓ_1 הוא $(1, 1, 3)$ ו- $(1, -1, 2)$ הוא וקטור הכיוון של הישר ℓ_2 .
שני הוקטורים ניצבים לנורמל של המישור $(A, B, 2)$, כלומר

$$(1, -1, 2) \cdot (A, B, 2) = 0, \quad (1, 1, 3) \cdot (A, B, 2) = 0$$

$$A - B + 4 = 0, \quad A + B + 6 = 0$$

לכן $B = A + 4$ ו- $A + A + 4 + 6 = 0$ כלומר $A = -5$, $B = -1$. לכן משוואת המישור היא: $-5x - y + 2z + D = 0$.
הנקודה $(1, 0, 0)$ נמצא על המישור ולכן $-5 + D = 0$ כלומר $D = 5$ ו- $A + B + D = -5 - 1 + 5 = -1$.

12. נתונים וקטורים $\vec{v}, \vec{w}$ שמקיימים $|\vec{v} - \vec{w}| = |\vec{v} + \vec{w}|$. בחרו את הטענה הנכונה.

פתרון: מתקיים:

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w}$$

$$|\vec{v} + \vec{w}|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w}$$

על פי הנתון: $|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v} + \vec{w}|^2$ לכן

$$\vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w}$$

לכן $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ כלומר $-2\vec{v} \cdot \vec{w} = 2\vec{v} \cdot \vec{w}$ ולכן $\vec{v}, \vec{w}$ ניצבים.

13. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(-ex^3 + e^2x^2 + ex^2 - e^2x)^3 - \ln(-x^2 + ex + x - e)^3$.
בחרו את הטענה הנכונה.

פתרון: נבדוק תחילה את תחום ההגדרה: $-x^2 + ex + x - e > 0$
וגם $ex(-x^2 + ex + x - e) > 0$.

משני האילוצים נדרוש ש- $(1-x)(x-e) > 0$ וגם $-x^2 + ex + x - e > 0$.
לכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $(1, e)$.

$$f(x) = 3 \ln \left(\frac{-ex^3 + e^2x^2 + ex^2 - e^2x}{-x^2 + ex + x - e} \right) = 3 \ln(ex)$$

כיוון ש- $\ln(x)$ פונקציה חח"ע, גם $f(x)$ חח"ע בתחום הגדרתה. בעצם היא פונקציה מונוטונית עולה ולכן התמונה שלה היא $(3 \ln e, 3 \ln e^2) = (3, 6)$ היא $(f(1), f(e))$.
לכן התשובה הנכונה היא: $f(x)$ חח"ע בקטע $(1, e)$ ותמונתה $(3, 6)$.

14. חשבו את השטח הנוצר בין הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^3$ והישרים $x = 0$ ו- $x = 4$.

פתרון: נבדוק מתי שתי הפונקציות נחתכות: $\sqrt{x} = x^3$ ולכן $x = x^6$ כלומר $x = 0$ ו- $x = 1$.
 לכן הפונקציות נחתכות ב- $x = 0$ ו- $x = 1$. בתחום $(0, 1)$ מתקיים $f(x) > g(x)$ ובתחום $(1, 4)$ מתקיים $g(x) > f(x)$.
 לכן השטח הדרוש הוא:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx + \int_1^4 (x^3 - \sqrt{x}) dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_1^4 =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + 64 - \frac{2}{3} 4^{3/2} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = 59\frac{1}{2}$$

15. תהי $F(x)$ פונקציה שמקיימת $F'(x) = \frac{x+1}{x}$ ו- $F(1) = 2$.
 נגדיר סדרה $a_n = F(n)$ לכל n טבעי. חשבו את סכום $a_1 + a_2 + \dots + a_{200}$.

פתרון: מתקיים $F(x) = \int \frac{x+1}{x} dx = \int (1 + \frac{1}{x}) dx = x + \ln|x| + C$
 לכן $F(1) = 2 = 1 + \ln 1 + C$ לכן $C = 1$ ו- $F(x) = x + \ln|x| + 1$
 לכן $a_n = F(n) = n + \ln n + 1$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{200} = \sum_{n=1}^{200} (n + \ln n + 1) = \sum_{n=1}^{200} n + \sum_{n=1}^{200} \ln n + \sum_{n=1}^{200} 1 =$$

$$\frac{(1+200)200}{2} + \ln(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 200) + 200 = 20100 + \ln(200!) + 200 = \ln(200!) + 20300$$

16. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \frac{\ln(15-2x-x^2)}{3x-4-|2x-6|}$.

פתרון: כדי למצוא את תחום ההגדרה נדרוש: $15 - 2x - x^2 > 0$ ו- $|2x - 6| \neq 3x - 4$.
 נפתור $15 - 2x - x^2 > 0$:
 $x^2 + 2x - 15 < 0$ כלומר $(x+5)(x-3) < 0$ כלומר $-5 < x < 3$.
 נפתור $|2x - 6| \neq 3x - 4$:
 נקבל $2x - 6 = 3x - 4$ או $2x - 6 = -(3x - 4)$.
 מהראשון: $x = -2$ (לא בתחום). מהשני: $5x = 2$ כלומר $x = \frac{2}{5}$.
 לכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $(-5, 2) \cup (\frac{2}{5}, 3)$.

$$17. \text{ מצאו את סכום הפתרונות של המשוואה } 9^x + 4^x - 6^x = 7 \cdot 6^{x-1}$$

פתרון א: מתקיים:

$$9 \cdot 3^{2(x-1)} + 4 \cdot 2^{2(x-1)} - 6 \cdot 2^{x-1} \cdot 3^{x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} \cdot 3^{x-1} =$$

$$9 \cdot 3^{2(x-1)} + 4 \cdot 2^{2(x-1)} - 13 \cdot 2^{x-1} \cdot 3^{x-1} =$$

$$9 \cdot 3^{x-1} \cdot (3^{x-1} - 2^{x-1}) + 4 \cdot 2^{x-1} (2^{x-1} - 3^{x-1}) =$$

$$(3^{x-1} - 2^{x-1}) \cdot (9 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 2^{x-1}) =$$

$$(3^{x-1} - 2^{x-1}) (3^{x+1} - 2^{x+1}) = 0$$

השוויון מתקיים כאשר $3^{x-1} = 2^{x-1}$ כלומר $x = 1$ או כאשר $3^{x+1} = 2^{x+1}$ כלומר $x = -1$

לכן הפתרונות הם $x = 1$ ו- $x = -1$ וסכומם 0.
פתרון ב: מתקיים:

$$3^{2x} + 2^{2x} - 3^x \cdot 2^x = 7 \cdot 2^{x-1} \cdot 3^{x-1}$$

נחלק ב- $2^{x-1} \cdot 3^{x-1}$

$$\frac{3^{x+1}}{2^{x-1}} + \frac{2^{x+1}}{3^{x-1}} - 2 \cdot 3 = 7 \Rightarrow 9 \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} + 4 \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 13 = 0$$

נסמן $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$ ונקבל

$$9t + \frac{4}{t} - 13 = 0 \Rightarrow 9t^2 - 13t + 4 = 0$$

לכן $t_1 = 1$ ו- $t_2 = \frac{4}{9}$ ולכן $t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{18} = \frac{13 \pm 5}{18}$

עבור $t_1 = 1$ נקבל $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = 1$ לכן $x_1 = 1$

עבור $t_2 = \frac{4}{9}$ נקבל $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = \frac{4}{9} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ לכן $x_2 - 1 = -2$ כלומר $x_2 = -1$

$$18. \text{ מצאו את סכום כל המספרים השלמים שמקיימים את אי השוויון } \sqrt{10-x} < x-4$$

פתרון: נפתור את אי השוויון: נעלה בריבוע: $10 - x < (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$

כלומר $0 < (x-6)(x-1)$ לכן $x > 6$ או $x < 1$

מצד שני, צריך לקיים $10 - x \geq 0$ כלומר $x \leq 10$

וגם כיוון ש- $\sqrt{10-x} < x-4$ צריך להתקיים $0 \leq \sqrt{10-x}$ כלומר $x > 4$

לכן המספרים השלמים שמקיימים את אי השוויון הם: 7, 8, 9, 10 וסכומם הוא: 34.

19. נתונה פונקציה גזירה $f(x)$ המקיימת $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ו- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)\tan x - 1}{4x - \pi} = 2$.
חשבו את $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

פתרון: נסמן $g(x) = f(x)\tan x$ מתקיים:

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)\tan x - f\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)\tan x - 1}{\frac{1}{4}(4x - \pi)} = 4 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)\tan x - 1}{4x - \pi} = 4 \cdot 2 = 8$$

מצד שני,

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (f(x)\tan x)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6 \quad \text{כלומר} \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 = 8$$

20. נתונה זווית α ברביע השני שמקיימת $4\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha = \frac{9}{2}$. חשבו את הגבול
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \arctan x}{\pi x \cos \alpha}$.

פתרון: מתקיים:

$$4\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha = 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2\cos^2 \alpha = 4 + 2\cos^2 \alpha = \frac{9}{2}$$

$$\text{לכן } \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \text{ וכיוון ש-} \alpha \text{ ברביע השני נקבל ש-} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \text{ לכן}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \arctan x}{\pi x \cos \alpha} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \arctan x}{\pi x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{8 \cdot \frac{\pi}{4}}{\pi} = -2$$