

מבחן סיווג במתמטיקה 27.1.22

פתרון

1. נתונה סדרה הנדסית שמקיימת $a_1 = 8, a_4 = 64$. מצאו k טבעי עבורו מתקיים $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_k = 42$.

פתרון: מתקיים $64 = a_4 = a_1 q^3 = 8q^3$ כלומר $q^3 = 8$ ולכן $q = 2$. בנוסף,

$$\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_k = \log_2 a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 42$$

כלומר

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 2^{42} \Rightarrow 8 \cdot (8 \cdot 2) \cdot \dots \cdot (8 \cdot 2^{k-1}) = 2^{42}$$

$$8^k \cdot 2^{1+2+\dots+k-1} = 2^{3k} \cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}} = 2^{3k + \frac{k(k-1)}{2}} = 2^{42}$$

לכן $3k + \frac{k(k-1)}{2} = 42$, כלומר $6k + k^2 - k = 84$ ולכן $k^2 + 5k - 84 = 0$, כלומר $k = 7$ או $k = -12$ וכיוון ש- k מספר טבעי נקבל ש- $k = 7$.

2. נתון מלבן במישור כך שאורכי הצלעות הסמוכות ואורך האלכסון של המלבן מהווים סדרה הנדסית עולה עם מנה q . מה ניתן להגיד על q ?

פתרון: שתי צלעות סמוכות ואלכסון יוצרות משולש ישר זווית שאורכי צלעותיו הם: $a_1 < a_1 q < a_1 q^2$.

על פי משפט פיתגורס מתקיים $a_1 q^2 = \sqrt{a_1^2 + a_1^2 q^2} = a_1 \sqrt{1 + q^2}$ לכן לאחר צמצום והעלאה בריבוע מתקיים

$$q^4 = 1 + q^2 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0$$

נסמן $t = q^2$ ונקבל $t^2 - t - 1 = 0$, כלומר $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. כיוון ש- $\sqrt{5} > 1$ הפתרון $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ ונפסל ולכן $q_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$ וכיוון ש- $q > 0$ נקבל ש- $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$. נעריך את הביטוי:

$$\sqrt{1.5} = \sqrt{\frac{1+2}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{4}}{2}} < q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} < \sqrt{\frac{1+\sqrt{9}}{2}} = \sqrt{\frac{1+3}{2}} = \sqrt{2}$$

כלומר $\sqrt{1.5} < q < \sqrt{2}$

3. מצאו את המקדם החופשי בפיתוח הבינום של $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$.

פתרון: נשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון:

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15} = \left(x^{1/3} + x^{-1/2}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \left(x^{1/3}\right)^k \left(x^{-1/2}\right)^{15-k} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{1/3k - 1/2(15-k)}$$

מחפשים את המקדם החופשי בפיתוח הבינום כלומר מקדם של x^0 ולכן נדרוש

$$\frac{1}{3}k - \frac{1}{2}(15-k) = 0 \Rightarrow 2k - 45 + 3k = 0 \Rightarrow k = 9$$

לכן המקדם של x^0 הוא $\binom{15}{9} = \binom{15}{6}$.

4. נתונה הטענה הבאה: "כל פונקציה חסומה היא פונקציה זוגית או פונקציה אי-זוגית". איזו מהטענות הבאות היא שלילה של הטענה הנתונה?

פתרון: קיימת פונקציה חסומה שאינה פונקציה זוגית ואינה פונקציה אי-זוגית.

5. יהי $z = \sqrt{3} + i$. נתון ש- $|w| = 2|z|$ ו- $\arg\left(\frac{zw}{1-i}\right) = \frac{3\pi}{4}$. מצאו את w .

פתרון: נעבור לייצוג טריגונומטרי. $z = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ לכן $|w| = 2|z| = 2 \cdot 2 = 4$. נסמן $w = 2\text{cis}\theta$. בנוסף, $1-i = \sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. מתקיים:

$$\arg\left(\frac{zw}{1-i}\right) = \arg z + \arg w - \arg(1-i) = \frac{\pi}{6} + \theta - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

ולכן $w = 4\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

6. נתון מספר מרוכב z המקיים $|z| = 1$ וגם $z^4 \neq -1$. נסמן $w = \frac{z^2}{1+z^4}$. בחרו את הטענה הנכונה.

פתרון: נחשב את הצמוד של המכנה ונכפול בו את המונה ואת המכנה: $\frac{z^2}{1+z^4} = \frac{z^2(1+\bar{z}^4)}{|1+z^4|^2}$

$$w = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{z^2(1+\bar{z}^4)}{|1+z^4|^2} = \frac{z^2 + z^2\bar{z}^4}{|1+z^4|^2} = \frac{z^2 + (z\bar{z})^2\bar{z}^2}{|1+z^4|^2} = \frac{z^2 + |z|^4\bar{z}^2}{|1+z^4|^2} = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{|1+z^4|^2} = \frac{2\text{Re}(z^2)}{|1+z^4|^2}$$

ולכן w מספר ממשי.

הסבר למעבר אחרון: נסמן $z^2 = a + ib$. מתקיים $z + \bar{z}^2 = a + ib + (a - ib) = 2a = 2\text{Re}(z^2)$.

7. מצאו n_0 טבעי מינימלי כך שאי-השוויון $n^2 \leq 2^n$ מתקיים לכל $n \geq n_0$.

פתרון: נבדוק החל מאיזו נקודה n_0 מקיימת את בסיס האינדוקציה ואת צעד האינדוקציה:

נניח שהטענה מתקיימת עבור n ונוכיח אותה עבור $n+1$, כלומר צריך להוכיח $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$.

לפי ההנחה מתקיים: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2$. נבדוק עבור אילו n מתקיים $2n^2 \geq (n+1)^2$.
 $n_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. כלומר $n^2 - 2n - 1 \geq 0$.
 לכן $n^2 - 2n - 1 \geq 0$ כאשר $n \geq 1 + 2\sqrt{2}$ או $n \leq 1 - 2\sqrt{2}$. כיוון ש- n טבעי אי השוויון יתקיים עבור $n \geq 4$. כיוון ש- $4^2 \leq 2^4$ נקבל ש- $n_0 = 4$ הוא בסיס האינדוקציה המתאים ועל פי עיקרון האינדוקציה לכל $n \geq 4$ מתקיים $n^2 \leq 2^n$.

8. נתון ש- x_1, x_2, x_3 הם פתרונות של המשוואה $x^3 - 5x^2 + 1 = 0$.
 חשבו את $\frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_1 x_2}$.

פתרון: על פי נוסחאות וייטה מתקיים: $x_1 + x_2 + x_3 = 5, x_1 x_2 x_3 = -1$. לכן

$$\frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{5}{-1} = -5$$

9. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{ax}}{1+x^2}$. מצאו את כל ערכי a עבורם ל- $f(x)$ יש גם מינימום וגם מקסימום מקומיים.

פתרון:

$$f'(x) = \frac{ae^{ax}(1+x^2) - e^{ax} \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^{ax}(ax^2 - 2x + a)}{(1+x^2)^2} = 0$$

אם $ax^2 - 2x + a = 0$. למשוואה יהיו שני פתרונות שונים אם $a \neq 0$ וגם $\Delta = 4 - 4a^2 = 4(1-a)(1+a) > 0$. כלומר $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. במקרה זה הנגזרת תחליף סימן בכל אחת מנקודות התאפסות של הנגזרת ולכן יהיו שתי נקודות קיצון, אחת מינימום והשניה מקסימום.

10. חשבו את הביטוי הבא:

$$\int \left(\frac{2x}{x+2} + \ln(x^2 + x + 3) \right) dx - \int \ln(2x^2 + 2x + 6) dx$$

פתרון:

$$\int \left(\frac{2x}{x+2} + \ln(x^2 + x + 3) \right) dx - \int \ln(2x^2 + 2x + 6) dx =$$

$$\int \left(2 \left(\frac{x+2-2}{x+2} \right) + \ln \left(\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 2x + 6} \right) \right) dx =$$

$$\int \left(2 \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) + \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right) dx = 2(x - 2 \ln |x+2|) + \ln \left(\frac{1}{2} \right) \cdot x + C =$$

$$2x - \ln |x+2|^4 + \ln (2^{-1})^x + C = 2x - \ln (x+2)^4 - \ln (2^x) + C =$$

$$2x - \ln (2^x (x+2)^4) + C$$

11. נתונים הישרים: $\ell_1 : x - 1 = y - 2 = z - 3$, $\ell_2 : x - 4 = y - 8 = z - 9$.
 נתון ש- $Ax + y + Cz + D = 0$ היא משוואת המישור שמכילה את שני הישרים.
 חשבו את D .

פתרון: נעביר את הישרים להצגה פרמטרית:

$$\ell_1 : (1, 2, 3) + t(1, 1, 1), \quad \ell_2 : (4, 8, 9) + s(1, 1, 1)$$

אלה שני ישרים מקבילים כי יש להם אותו וקטור כיוון וגם לא קיים t כך ש- $(4, 8, 9) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$ ולכן הישרים לא מתלכדים. לכן קיים מישור יחיד שמכיל את שני הישרים.

כדי למצוא את משוואת המישור נמצא שני וקטורים במישור. הראשון הוא וקטור הכיוון של שני הישרים $(1, 1, 1)$.

הוקטור השני הוא וקטור שמחבר את שתי הנקודות מהישרים השונים:

$$(4 - 1, 8 - 2, 9 - 3) = (3, 6, 6)$$

הנורמל של המישור $(A, 1, C)$ ניצב לשני הוקטורים ולכן מתקיים:

$$(1, 1, 1) \cdot (A, 1, C) = 0 \Rightarrow A + 1 + C = 0 \Rightarrow A = -1 - C$$

$$(3, 6, 6) \cdot (A, 1, C) = 0 \Rightarrow 3A + 6 + 6C = 0 \Rightarrow A = -2 - 2C$$

לכן $-1 - C = -2 - 2C$ ולכן $C = -1$ ו- $A = 0$.

כלומר, משוואת המישור היא $y - z + D = 0$. נציב את הנקודה $(1, 2, 3)$ ונקבל ש- $D = 1$.

12. נתונים וקטורים $\vec{v}, \vec{w}$ במרחב. בחרו את הטענה הנכונה.
 פתרון: נסתכל על המשוואה $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$. נעביר אגפים ונקבל: $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$.
 אם השוויון מתקיים לכל $\vec{u}$ אז בפרט הוא מתקיים עבור $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$ ואז נקבל

$$(\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = |\vec{v} - \vec{w}|^2 = 0 \Rightarrow \vec{v} - \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$$

13. תהי $f(x) = \frac{3-3\tan^2(2x)}{1+\tan^2(2x)}$. בחרו את הטענה הנכונה.

פתרון: תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $\cos 2x \neq 0$ כלומר $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ולכן $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$

$$f(x) = \frac{3-3\tan^2(2x)}{1+\tan^2(2x)} = 3 \left(\frac{1 - \frac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)}}{1 + \frac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)}} \right) = 3 \left(\frac{\cos^2(2x) - \sin^2(2x)}{\cos^2(2x) + \sin^2(2x)} \right) = 3 \cos(4x)$$

מתקיים ש- $\cos t$ חח"ע עבור $0 \leq t \leq \pi$ ולכן $\cos 4x$ חח"ע עבור $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ויחד עם תחום ההגדרה נקבל ש- $f(x)$ חח"ע בקטע $[0, \frac{\pi}{4}]$. התמונה מתקבלת במינימום ובמקסימום של הפונקציה. התמונה של $\cos(4x)$ היא $[-1, 1]$ ולכן התמונה של $3 \cos 4x$ היא $[-3, 3]$. כיוון ש- $\frac{\pi}{4}$ לא בתחום ההגדרה נקבל שהתמונה היא $(-3, 3]$.
פתרון נוסף: נשתמש בנוסחה $1 + \tan^2(2x) = \frac{1}{\cos^2 2x}$

$$f(x) = \frac{3-3\tan^2(2x)}{1+\tan^2(2x)} = 3 \left(\frac{1 - \frac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)}}{\frac{1}{\cos^2 2x}} \right) = 3 (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 3 \cos 4x$$

14. חשבו את השטח הנוצר בין הגרפים של הפונקציות $f(x) = 2^x, g(x) = x^2$ והישרים $x = 0$ ו- $x = 3$.

פתרון: הפונקציות $f(x), g(x)$ נחתכות ב- $x = 2$. בקטע $[0, 2]$ מתקיים $f(x) \geq g(x)$ ובקטע $[2, 3]$ מתקיים $g(x) \geq f(x)$.
לכן השטח הדרוש:

$$\int_0^2 (2^x - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 2^x) dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2^x}{\ln 2} \right) \Big|_2^3 =$$

$$\frac{4}{\ln 2} - \frac{8}{3} - \frac{1}{\ln 2} + \frac{27}{3} - \frac{8}{\ln 2} - \frac{8}{3} + \frac{4}{\ln 2} = \frac{11}{3} - \frac{1}{\ln 2}$$

15. תהי $F(x)$ פונקציה שמקיימת $F(0) = 0$ ו- $F'(x) = \cos(\frac{\pi x}{2})$. נגדיר סדרה $a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}$ חשבו את הסכום $a_n = \pi F(n)$.

פתרון: מתקיים $F(x) = \int \cos(\frac{\pi x}{2}) dx = \frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi x}{2}) + C$ ונקבל $C = 0$ ולכן $F(x) = \frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi x}{2})$.
לכן $a_n = \pi F(n) = 2 \sin(\frac{\pi n}{2})$

$$a_n = \begin{cases} 2 \sin(2\pi k) = 0 & n = 4k \\ 2 \sin(2\pi k + \frac{\pi}{2}) = 2 & n = 4k + 1 \\ 2 \sin(\pi(2k + 1)) = 0 & n = 4k + 2 \\ 2 \sin(2\pi k + \frac{3\pi}{2}) = -2 & n = 4k + 3 \end{cases}$$

לכן סכום של כל 4 אברי סדרה עוקבים הוא $0 = 0 + (-2) + 0 + 2$. לכן $a_1 + \dots + a_{2020} = 0$

$$a_1 + \dots + a_{2022} = (a_1 + \dots + a_{2020}) + a_{2021} + a_{2022} = 0 + 2 + 0 = 2$$

$$f(x) = \frac{\arcsin(x^2-1)}{\sqrt{|x+2|-|x|}} \text{ של } 16. \text{ מצאו את תחום ההגדרה של}$$

פתרון: עבור $\arcsin(x^2-1)$ תחום ההגדרה הוא $-1 \leq x^2-1 \leq 1$ ולכן $0 \leq x^2 \leq 2$, כלומר $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. עבור המכנה נדרוש $\sqrt{|x+2|-|x|} \neq 0$, ולכן $|x+2|-|x| > 0$. נפריד ל-3 תחומים: $x \geq 0$, $-2 \leq x < 0$, $x < -2$. עבור $x \geq 0$ נקבל $x+2-x=2 > 0$ לכן כל $x \geq 0$ מתאים. עבור $-2 \leq x < 0$ נקבל $x+2-(-x)=2x+2 > 0$ לכן $x > -1$. בתחום הנתון $-1 < x < 0$. עבור $x < -2$ נקבל $x+2-(-x)=-x-2 > 0$ לכן אף $x < -2$ לא מקיים את הדרוש. סך הכל קיבלנו שתחום ההגדרה הוא $x > -1$. סך הכל תחום ההגדרה הוא $[-1, 2]$.

$$17. \text{ מצאו את מכפלת הפתרונות של המשוואה } \log_5 x - \log_x 125 + 2 = 0.$$

פתרון:

$$\log_5 x - \frac{\log_5 5^3}{\log_5 x} + 2 = \log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} + 2 = 0$$

נסמן $t = \log_5 x$ ונקבל $t - \frac{3}{t} + 2 = 0$ כלומר $t^2 + 2t - 3 = (t+3)(t-1) = 0$ לכן $t_1 = -3, t_2 = 1$. עבור $t_1 = -3$ נקבל $x_1 = 5^{-3} = \frac{1}{125}$ ועבור $t_2 = 1$ נקבל $x_2 = 5$. לכן מכפלת הפתרונות היא $5 \cdot \frac{1}{125} = \frac{1}{25}$.

$$18. \text{ נתונה פונקציה } f(x) = \cos(2x). \text{ חשבו את } f^{(2022)}(0) \text{ (הנגזרת ה-2022 של } f(x) \text{ ב-0).}$$

פתרון: נסתכל על החוקיות של הנגזרת:

$$f'(x) = -2 \sin(2x), f''(x) = -2^2 \cos(2x), f'''(x) = 2^3 \sin(2x), f^{(4)}(x) = 2^4 \cos(2x)$$

ולכן

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2^n \cos(2x) & n = 4k \\ -2^n \sin(2x) & n = 4k + 1 \\ -2^n \cos(2x) & n = 4k + 2 \\ 2^n \sin(2x) & n = 4k + 3 \end{cases}$$

$$\text{לכן } f^{(2022)}(0) = -2^{2022} = -4^{1011} \text{ ו-} f^{(2022)}(x) = -2^{2022} \cos(2x)$$

19. נתונה פונקציה גזירה אי-זוגית $f(x)$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.
בחרו את הטענה הנכונה בהכרח.

פתרון: כיוון ש- $f(x)$ אי-זוגית $f(0) = 0$. לכן על פי הגדרת הנגזרת מתקיים
 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

20. נתונה זווית α ברביע השני שמקיימת $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = -\frac{1}{9}$. חשבו את $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \pi) \cos \alpha}{\arccos x}$.

פתרון: מתקיים

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = -\frac{1}{9} \Rightarrow (\cos^2 \alpha - \sin^2(\alpha)) (\cos^2 \alpha + \sin^2(\alpha)) = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9}$$

לכן $\cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$ וכיון ש- α ברביע השני מתקיים $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$
 לכן

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \pi) \cos \alpha}{\arccos x} = \frac{\pi \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{3}$$