

תשובות

תשובה מספר 1

$$\begin{aligned}(x-3)^2+y^2 &= (3x-1)^2 \\ x^2-6x+9+y^2 &= 9x^2-6x+1 \\ 8x^2-y^2 &= 8 \\ \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{8} &= 1\end{aligned}$$

המשוואה לעיל היא הצורה הקאנונית של היפרבולה שמרכזה בראשית הצירים.

תשובה מספר 2

הערכים האפשריים של i^n הם $1, -1, i, -i$.
מכאן הערכים האפשריים של $i^n + i^{-n}$ הם $-$

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{1} &= 2 \\ -1+\left(\frac{1}{-1}\right) &= -2 \\ i+\frac{1}{i} = i+\left(\frac{-i}{1}\right) &= 0 \\ -i+\left(\frac{1}{-i}\right) = -i+\frac{i}{1} &= 0\end{aligned}$$

תשובה מספר 3

$f(x) = 3 - (4 - x) = x - 1$ כאשר $x \leq 4$.
 $f(x) = 3 - (x - 4) = 7 - x$ כאשר $4 \leq x$.
התמונה של $x - 1$ בתחום $[-1, 4]$ היא $[-2, 3]$ והתמונה של $7 - x$ בתחום $[4, 5]$ היא $[2, 3]$. לכן התמונה של $f(x)$ בתחום $[-1, 5]$ היא $[-2, 3] \cup [2, 3] = [-2, 3]$.

תשובה מספר 4

דרך א:

$$g(x) = e^{\left(\frac{1}{\ln e^{\left(\frac{1}{\ln x}\right)}}\right)} = e^{\left(\frac{1}{\ln x}\right)} = e^{\ln x} = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

דרך ב:

כאשר x שואף לאפס -

$$\ln x \rightarrow -\infty$$

$$0 > \frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^0 = 1$$

בנוסף, כאשר x שואף לאפס -

$$f(x) < 1$$

נעבור ל- $g(x)$ בגבול של $f(x)$ שמצאנו -

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{\substack{f(x) \rightarrow 1 \\ f(x) < 1}} e^{\frac{1}{\ln f(x)}}$$

כאשר $f(x)$ שואפת ל-1 וקטנה ממנו -

$$0 > \ln f(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{\ln f(x)} \rightarrow -\infty$$

$$g(x) = e^{\frac{1}{\ln f(x)}} \rightarrow 0$$

תשובה מספר 5

הסכום של כל שני איברים עוקבים בסדרה $a_{2n-1} + a_{2n}$ הוא -

$$(-1)^{(2n-1)+1} \cdot (2n-1) + (-1)^{(2n+1)} \cdot 2n = (2n-1) - 2n = -1$$

לכן, לאחר $2n$ איברים, סכום הסדרה הוא $-n$. מכאן שאנחנו מחפשים סכום לאחר מספר אי-זוגי של איברים $2n+1$.סכום הסדרה אחרי $2n+1$ איברים הוא $-n + (2n+1)$.

$$S_{(k=2n+1)} = 2n+1 - n = 23$$

$$n = 22$$

$$k = 44 + 1 = 45$$

תשובה מספר 6

$$x^4 - 3x^3 + x - 3 = x^3(x-3) + (x-3) = (x^3+1)(x-3) = (x+1)(x^2-x+1)(x-3)$$

תשובה מספר 7

לפונקציה שבסרטוט מספר תכונות בולטות, ביניהן אי-זוגיות ושאיפה ל- 0 ב- $\pm\infty$.
הדרך המהירה ביותר לפסול את פונקציות ב, ג ו-ד היא בעזרת התכונה השנייה:
לפונקציה $x \cdot \sin x$ אין גבולות ב- $\pm\infty$ מאחר והיא נעה מערכים חיוביים לשליליים שערכם המוחלט הולך וגדל עם ההתרחקות של x מהאפס.
הפונקציה $3x - 2x^3$ שואפת ב- $\pm\infty$ ל- $\mp\infty$.
הפונקציה xe^x אכן שואפת לאפס ב- $-\infty$, אבל שואפת ל- ∞ ב- ∞ .
המועמדת היחידה שנותרה היא xe^{-x^2} , והיא אכן שואפת לאפס ב- $\pm\infty$.

תשובה מספר 8

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^3 + 1}{x^5 + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^2 - x + 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} = \frac{3}{5}$$

תשובה מספר 9

א לא נכונה בהכרח, כי יכול להיות שערך המקסימום של הפונקציה המקורית מתקבל בערך x שלילי.
ג בהכרח לא נכונה, מפני שעל פי הנתונים אין אף ערך של x שעבורו הערך המקסימלי הוא 8.
ד לא נכונה בהכרח - היא תתקיים רק אם כל הערכים השליליים של $f(x)$ מתקיימים מתחת למינימום של $x - x^2$, זאת אומרת בתחום $x < \frac{1}{4}$.
ב נכונה בהכרח מאחר והפעלת הערך המוחלט על הפונקציה תהפוך את הגדול מבין $|\min(f(x))|$ ו- $|\max(f(x))|$ לערך המקסימום של הפונקציה.

תשובה מספר 10

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x + 2 \sin^2 x) dx &= \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos^2 x)^2 + 2 \sin^2 x) dx &= \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((1 - \sin^2 x)^2 + 2 \sin^2 x) dx &= \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + 1) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \\ A + [x]_0^{\frac{\pi}{2}} &= A + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

תשובה מספר 11

מכך שהנגזרת השנייה קבועה נסיק שהנגזרת היא מהצורה $f'(x) = ax + b$.

מאחר ונתון $f'(0) = 0$, הרי ש- $b = 0$ ו- $f'(x) = ax$.

מצורת הנגזרת נסיק לגבי הפונקציה שהיא מהצורה $f(x) = sx^2 + t$, $s = \frac{a}{2}$.

מהנתונים, $f(1) - f(-3) = 8$.

כמו כן, $f(1) - f(-3) = s(-1)^2 + t - (s(-3)^2 + t)$.

מחיבור שתי המשוואות -

$$s + t - 9s - t = 8$$

$$s = -1$$

ולכן $f(x) = -x^2 + t$, ואחרי הצבה ב- $f(1)$ או $f(3)$ לקבלת הקבוע - $f(x) = -x^2 + 9$.

לסיום - $f(2) = -4 + 9 = 5$.

תשובה מספר 12

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\cos x - 2\cos^3 x}{\sin^5 x - \sin x \cdot \cos^4 x} \right)' = \left(\frac{\cos x (1 - 2\cos^2 x)}{\sin x (\sin^4 x - \cos^4 x)} \right)' = \\ &= \left(\frac{\cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)}{\sin x (\sin^2 x - \cos^2 x) (\sin^2 x + \cos^2 x)} \right)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \\ &= (\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

נציב את ערך x המבוקש:

$$\frac{-1}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{-1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{4}{3}$$

תשובה מספר 13

לפי הנתונים ונוסחת סכום של סדרה שסכומה מתכנס:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{1-q} &= 5 \cdot \frac{a_1 q^2}{1-q^3} \\ \frac{1}{1-q} &= \frac{5q^2}{(1-q)(1+q+q^2)} \\ \frac{5q^2}{(1+q+q^2)} &= 1 \\ 4q^2 - q - 1 &= 0 \end{aligned}$$

על פי ויאטה, סכום שני השורשים הוא $\frac{-b}{a} = \frac{1}{4}$.

תשובה מספר 14

על פי הנתונים – מאחר ויש לפחות שני מספרים ממשיים שונים ב-A, ומאחר ובין כל שני מספרים ממשיים שונים ב-A יש בקבוצה איבר נוסף שהוא מספר ממשי שנמצא ביניהם, הרי ש-A היא קבוצה אינסופית הבנויה מרצף מספרים ממשיים בקטע סופי או אינסופי, סגור או פתוח.

מאחר וכך, הרי שניתן לכל y ו- z שרירותיים שנבחר מהקבוצה לבחור x שיהיה ביניהם ושמרחקו מ- z יהיה קטן או שווה למרחקו מ- y , שזוהי הטענה המופיעה בסעיף ב.

טענה א נכונה רק בקבוצת מספרים ממשיים בה יש לכל האיברים את אותו הערך.

טענה ג לא נכונה ל- x שהוא האיבר בעל הערך המקסימלי ב-A, אם A מתארת קטע סגור מלמעלה.

טענה ד לא נכונה ל- y ו- z שהם האיברים בעלי הערכים המינימלי והמקסימלי ב-A, אם A מתארת קטע סגור מלמעלה ו/או מלמטה.

תשובה מספר 15

הסכום הנתון הוא הבינום שמשמש לפתיחת הביטוי $(x + 1 - x)^n$ ללא האיבר האחרון בו, $\binom{n}{n}x^0(1-x)^n$.
לכן ערכו הוא –

$$(x + 1 - x)^n - \binom{n}{n}x^0(1-x)^n = 1 - (1-x)^n$$

תשובה מספר 16

$$x^{\ln x} = 10$$

$$\ln x^{\ln x} = \ln 10$$

$$\ln x \cdot \ln x = \ln 10$$

$$\ln x = \pm \sqrt{\ln 10}$$

$$x_1 = e^{\sqrt{\ln 10}}, x_2 = e^{-\sqrt{\ln 10}}$$

$$x_1 \cdot x_2 = e^{\sqrt{\ln 10} - \sqrt{\ln 10}} = e^0 = 1$$

תשובה מספר 17

על פי הנתונים, נקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה $y = \pm\sqrt{3x}$ כך שהנקודה (4,?) נמצאת באמצע הקטע הישר AB. מאחר ומרכז הקטע נמצא ב- $y = 4$ והשיפועים בתשובות חיוביים, סביר שערכי שתי הנקודות ימצאו ברביע הראשון. אם לא נמצא פתרון שם נוכל לעבור לערכי y שליליים עבור אחת הנקודות.

נציין את הנקודה A ב- $(u, \sqrt{3u})$ ואת הנקודה B ב- $(v, \sqrt{3v})$. מאחר ונקודת האמצע בקטע הישר שביניהן נמצאת

$$\text{ב-} y = 4, \text{ אפשר להסיק את המשוואה } \frac{\sqrt{3u} + \sqrt{3v}}{2} = 4, \text{ או,}$$

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{3v} - \sqrt{3u}}{v - u} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{v} - \sqrt{u})}{v - u} \text{ שיפוע הישר שבין A ל-B ניתן על ידי הביטוי}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{v} - \sqrt{u})}{(\sqrt{v} - \sqrt{u})(\sqrt{v} + \sqrt{u})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$$

מאחר והסכום $\sqrt{u} + \sqrt{v}$ ידוע לנו, נשאר רק לחשב את השיפוע:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{8}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{8}$$

תשובה מספר 18

$$a = \operatorname{re}(z + 2i) < 0$$

$$\operatorname{im}(z + 2i) = -\operatorname{re}(z + 2i) = -a$$

$$\operatorname{im}(z) = -a - 2$$

$$f(a) = \operatorname{re}(z) \cdot \operatorname{im}(z) = a(-a - 2) = -a^2 - 2a$$

$$f'(a) = -2a - 2$$

$$-2a - 2 = 0$$

$$a = -1$$

$$f(-1) = 1$$

תשובה מספר 19

$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ הם וקטורי יחידה. $\hat{u}$ מאונך ל- $\hat{v}$.

$$\begin{aligned} 1 &= |\hat{u} + \hat{v} + \hat{w}|^2 = (\hat{u} + \hat{v} + \hat{w}) \cdot (\hat{u} + \hat{v} + \hat{w}) = \\ &(\hat{u} + \hat{v}) \cdot (\hat{u} + \hat{v}) + (\hat{u} + \hat{v}) \cdot \hat{w} + \hat{w} \cdot (\hat{u} + \hat{v}) + \hat{w} \cdot \hat{w} = \\ &\hat{u} \cdot \hat{u} + \hat{v} \cdot \hat{v} + 2(\hat{w} \cdot (\hat{u} + \hat{v})) + 1 = \\ &3 + 2\hat{w} \cdot (\hat{u} + \hat{v}) \end{aligned}$$

כלומר, $\hat{w} \cdot (\hat{u} + \hat{v}) = -1$, $2\hat{w} \cdot (\hat{u} + \hat{v}) = -2$

נחשב: $|\hat{u} + \hat{v}|^2 = (\hat{u} + \hat{v}) \cdot (\hat{u} + \hat{v}) = |\hat{u}|^2 + 2\hat{u} \cdot \hat{v} + |\hat{v}|^2 = 1 + 0 + 1 = 2$

ומכאן, אם α היא הזווית בין $\hat{w}$ לבין $(\hat{u} + \hat{v})$

$$-1 = \hat{w} \cdot (\hat{u} + \hat{v}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

תשובה מספר 20

לכל n , a_n הוא הסכום $\sum_{k=1}^n 2^k$,

ולפי סכום סדרה הנדסית שווה $2 - 2^{n+1} = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1}$.

הסכום של 10 האיברים הראשונים בסדרה a_n הוא

$$2^2 + 2^3 + \dots + 2^{11} - 10 \cdot 2 = \frac{2^2(2^{10} - 1)}{2 - 1} - 20 = 2^{12} - 24$$

תשובה מספר 21

$$\begin{aligned}\cot x \cdot (1 + \cos x) &= \sin 2x \\ \frac{\cos x}{\sin x} (1 + \cos x) &= 2 \sin x \cdot \cos x \\ \cos x (1 + \cos x) &= \cos x \cdot 2\sin^2 x\end{aligned}$$

שני פתרונות קיימים בתחום כאשר $\cos x = 0$, והם $x = \pm \frac{\pi}{2}$

נניח ש- $\cos x \neq 0$ ונחלק:

$$\begin{aligned}1 + \cos x &= 2\sin^2 x \\ 1 + \cos x &= 2(1 - \cos^2 x) \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 &= 0\end{aligned}$$

נציב $t = \cos x$ ונפתור משוואה ריבועית $t^2 + t - 1 = 0$

$$t = \cos x = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} = -1, \frac{1}{2}$$

ל- $\cos x = -1$ אין פתרון בתחום הנתון.

ל- $\cos x = \frac{1}{2}$ יש שני פתרונות בתחום, $x = \pm \frac{\pi}{3}$.

סך הכול 4 פתרונות.

תשובה מספר 22

אם סכום המקדמים של הפולינום P שהוא תוצאת פיתוח $(ax + 2b)^5$ שווה 32, אזי $P(1) = 32$. מכאן -

$$(a + 2b)^5 = 32$$

$$a + 2b = 2$$

באופן דומה נסיק -

$$(3a + b)^6 = 64$$

$$3a + b = 2$$

מכאן נותר רק לפתור את המערכת ולהגיע ל- $a = \frac{2}{5}$.

תשובה מספר 23

האינטגרל לא-מסוים:

$$\int \frac{1}{\ln(x^x)} dx = \int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c$$

נציב בו את ערכי האינטגרל המסוים:

$$\ln(\ln(e^e)) - \ln(\ln(\sqrt{e^e})) = \ln(e) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) = 1 - (\ln(e) - \ln 2) = 1 - 1 + \ln 2 = \ln 2$$

תשובה מספר 24

$$f(x) = x^2 + 8$$

$$f'(x) = 2x$$

מכאן ומהנתונים נחשב את משוואות שני המשיקים:

$$y = 4x + 4 \text{ הוא בנקודה } (2, 12)$$

$$y = -8x - 8 \text{ הוא בנקודה } (-4, 24)$$

והם נפגשים בנקודה $(-1, 0)$.

השטח בין הפונקציה לציר ה- x הוא:

$$\int_{-4}^2 (x^2 + 8) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 8x \right]_{-4}^2 = \left(\frac{8}{3} + 16 \right) - \left(\frac{-64}{3} - 32 \right) = 72$$

משטח זה צריך להוריד את שטחי שני המשולשים הנוצרים על ידי המשיקים, ציר ה- x והאנכים $x = 2$ ו- $x = -4$:

$$72 - \left(\frac{3 \cdot 24}{2} + \frac{3 \cdot 12}{2} \right) = 72 - 54 = 18$$

תשובה מספר 25

משוואת מישור המאונך למישור π ומכיל את P_0 לא קובעת ביחידות את המישור π .

לדוגמה, נניח ש- P_0 היא הנקודה $(0, 0, 0)$ ונתון כי המישור $x + y + z = 0$ מאונך למישור π .

בהכללה, π יכול להיות כל מישור $Ax + By + Cz = 0$ המקיים $A + B + C = 0$, למשל, המישור $x + y - 2z = 0$

או המישור $x - 2y + z = 0$