מבחן סיווג במתמטיקה 22.8.24 - פתרון

1. יהי $\alpha \in [0,\pi]$ ותהי a_n סדרה הנדסית אינסופית המקיימת:
האיבר הראשון של הסדרה הוא $a_1 = \sin\alpha$ והמנה $q = -\cos\alpha$. נתון כי סכום הסדרה שווה ל-$\frac{\sqrt{3}}{3}$. מצאו את α.
פתרון: כיוון ש-$q = -\cos\alpha$ אז $1-(-\cos\alpha) = 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ואז:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

2. נתונה פונקציה $f(x) = \left|x^2-8x+15\right|$ המוגדרת בקטע $A=[0,8)$.
מצאו את התמונה של $f(x)$ בתחום ההגדרה A.
פתרון: מתקיים כי $g(x) = x^2-8x+15 = (x-5)(x-3)$ שמקיימת כי $g(x) \geq 0$ כאשר $x \in (-\infty,3] \cup [5,\infty)$ ו-$g(x) \leq 0$ כאשר $x \in [3,5]$. לכן בתחום ההגדרה הנתון $A = [0,\infty)$ מתקיים:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-8x+15 & x \in [0,3] \cup [5,8) \\ -\left(x^2-8x+15\right) & x \in [3,5] \end{cases}$$

מתקיים כי המקסימום של $f(x)$ בקטע $[3,5]$ מתקבל ב-$x=4$ ושווה ל-$f(4)=1$ ומינימום מתקבל ב-$x=0$ ושווה ל-$f(3)=f(5)=0$.
ולכן התמונה של f בקטע $[3,5]$ הוא $[0,1]$.
בקטע $[0,3]$ הפונקציה מונוטונית יורדת ולכן התמונה היא $[f(3),f(0)] = [0,15]$.
בקטע $[5,8)$, הפונקציה מונוטונית עולה ולכן התמונה היא $[f(5),f(8)) = [0,15)$.
סך הכל התמונה של f בתחום A היא $[0,15]$.

3. יהי $f(x) = \left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{20}$. בפיתוח הבינום של ניוטון של $f(x)$ נסמן:
a - המקדם החופשי, b - המקדם של x, c - המקדם של x^2. בחרו את הטענה הנכונה.
פתרון: על פי נוסחת הבינום של ניוטון מתקיים:

$$f(x) = \left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{n}\binom{20}{k}\left(\sqrt{x}\right)^k\left(\frac{1}{x}\right)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}x^{\frac{1}{2}k-20+k} = \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}x^{\frac{3}{2}k-20}$$

המקדם החופשי מתקבל כאשר $\frac{3}{2}k-20=0$. מכאן $3k=40$ ולכן $k=\frac{40}{3}\notin\mathbb{N}$ ונובע ש- $a=0$.
המקדם של x מתקבל כאשר $\frac{3}{2}k-20=1$. מכאם $3k=42$ ולכן $k=14$ ונובע ש- $b=\binom{20}{14}$.
המקדם של x^2 מתקבל כאשר $\frac{3}{2}k-20=2$. מכאן $3k=44$ ולכן $k=\frac{44}{3}\notin\mathbb{N}$

ונובע ש־ $c = 0$.
לכן האפשרות היחידה שמתאימה היא $\binom{20}{14}$ $= 2a + b - c^2$.

4. מתקיים כי כל פונקציה המקיימת $f(x_1) = y_1$ וגם $f(x_2) = y_2$ כך ש־ $x_1 \neq x_2$ וגם $y_1 \neq y_2$, היא פונקציה שאינה קבועה. אז בהכרח:
פתרון: השלילה של הטענה הנתונה: קיימת פונקציה המקיימת $f(x_1) = y_1$ וגם $f(x_2) = y_2$ כך ש־ $x_1 \neq x_2$ וגם $y_1 \neq y_2$ והיא פונקציה קבועה. ולכן הטענה שנכונה בהכרח היא: לא קיימת פונקציה המקיימת $f(x_1) = y_1$ וגם $f(x_2) = y_2$ כך ש־ $x_1 \neq x_2$ וגם $y_1 \neq y_2$ והפונקציה היא קבועה.

5. תהי A קבוצת כל המספרים המרוכבים המקיימים את המשוואה $\left|\frac{z+\bar{z}+4}{3z-\bar{z}-2}\right| = 1$. אז הקבוצה A מקיימת:
פתרון: מהמשוואה הנתונה נובע כי $|3z - \bar{z} - 2|^2 = |z + \bar{z} + 4|^2$. נסמן $z = a + bi$ ולכן נקבל את השוויון הבא:

$$|2a + 4|^2 = (3(a + bi) - (a - bi) - 2)^2 = |2a - 2 + 4bi|^2 = (2a - 2)^2 + 16b^2$$

ולכן

$$4a^2 + 16a + 16 = 4a^2 - 8a + 4 + 16b^2 \Rightarrow a = \frac{1}{24}\left(16b^2 - 12\right) = \frac{1}{6}\left(4b^2 - 3\right)$$

ולכן $A = \left\{a + bi \mid a = \frac{1}{6}\left(4b^2 - 3\right)\right\}$ מתארת פרבולה במישור המרוכב עם סימטריה ביחס לציר הממשי.

6. נתונה המשוואה $z^3 - (2 + 8i)z^2 + (1 + 8i)z = 0$. בחרו את הטענה הנכונה.
פתרון: מתקיים

$$z^3 - (2 + 8i)z^2 + (1 + 8i)z = z\left(z^2 - (2 + 8i)z + (1 + 8i)\right) = 0$$

קיבלנו ש־$z_1 = 0$ הוא פתרון למשוואה. נמצא פתרונות של המשוואה הריבועית:

$$z_{1,2} = \frac{2 + 8i \pm \sqrt{(2 + 8i)^2 - 4(1 + 8i)}}{2} = \frac{2 + 8i \pm \sqrt{(4 + 32i - 64) - 4 - 32i}}{2} =$$

$$\frac{2 + 8i \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{2 + 8i \pm 8i}{2} = 1 + 4i \pm 4i$$

ולכן $z_2 = 1$ ו־$z_3 = 1 + 8i$. לכן למשוואה שני פתרונות ממשיים והחלק המדומה של הפתרון השלישי הוא 8.

7. לכל n טבעי נסמן: $S_n = \log_{10}\frac{2}{1} + 2\log_{10}\frac{3}{2} + \cdots + n\log_{10}\frac{n+1}{n}$. חשבו את S_9.
פתרון: מתקיים:

$$S_9 = \log_{10}\frac{2}{1} + 2\log_{10}\frac{3}{2} + \cdots + 9\log_{10}\frac{9+1}{9} = \log_{10}\frac{2}{1} + \log_{10}\frac{3^2}{2^2} + \cdots + \log_{10}\frac{10^9}{9^9} =$$

$$\log_{10}\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \cdots \cdot \frac{10^9}{9^9}\right) = \log_{10}\left(\frac{10^9}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 9}\right) = \log_{10} 10^9 - \log_{10}(9!) = 9 - \log_{10}(9!)$$

8. נתון פולינום $p(x)=x^5+ax^4+5x^3-27x^2-36x+b$ כאשר a,b פרמטרים ממשיים. ידוע כי:
1. $3i,-3i$ הם שני שורשים של הפולינום.
2. מכפלת שורשי הפולינום שווה ל־0.
3. סכום שורשי הפולינום שווה ל־3.

בחרו את הטענה הנכונה.

פתרון: על פי הנתון מתקיים כי סכום שורשי הפולינום הוא 3.
מצד שני, על פי נוסחאות וייטה סכום שורשי הפולינום הוא $-\frac{a}{1}$ ולכן $a=-3$.
בנוסף, על פי הנתון מכפלת שורשי הפולינום היא 0.
מצד שני, על פי נוסחאות וייטה, מכפלת שורשי הפולינום היא $(-1)^5\frac{b}{1}=-b$ ולכן $b=0$.
לכן $p(x)=x^5-3x^4+5x^3-27x^2-36x=x\left(x^4-3x^3+5x^2-27x-36\right)$.
על פי הנתון $3i,-3i$ שורשים של הפולינום ולכן הפולינום $(x-3i)(x+3i)=x^2+9$ מחלק את הפולינום $q(x)=x^4-3x^3+5x^2-27x-36$.
מחלוקת פולינומים מקבלים כי
$q(x)=\left(x^2+9\right)\left(x^2-3x-4\right)=\left(x^2+9\right)(x-4)(x+1)$
ולכן $x=4$ הוא שורש של הפולינום.

9. נתונה הפונקציה $f:A\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x+\ln\left(3-x^2\right)$ כאשר A הוא תחום ההגדרה המקסימלי של f.
בחרו את הטענה הנכונה.
פתרון: תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)=\left\{x\mid 3-x^2>0\right\}=A$.
מתקיים $\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x^2+2x-3}{x^2-3}=\frac{3-2x-x^2}{3-x^2}=1-\frac{2x}{3-x^2}=f'(x)$.
מתקיים כי המונה מתאפס ב־$x=1,x=-3$ אבל $x=-3$ לא בתחום ההגדרה ולכן יש נקודה אחת חשודה לקיצון והיא $x=1$.
מתקיים כי $f'(x)>0$ עבור $x<1$ ו־$f'(x)<0$ עבור $x>1$ בסביבה מסויימת של 1 ולכן $x=1$ היא נקודת מקסימום מקומי.

10. תהי $g(x)$ פונקציה קדומה של הפונקציה $\sin x\cos x$.
נתון כי הפונקציה $f(x)=\arcsin(2g(x))$ עוברת דרך הנקודה $\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$.
מצאו את $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
פתרון: מתקיים $g(x)=\int\sin x\cos xdx=\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=-\frac{1}{4}\cos(2x)+C$.
לכן $f(x)=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)+2C\right)$.
לכן $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\cos(\pi)+2C\right)=-\frac{\pi}{6}$.
לכן $\frac{1}{2}+2C=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ ולכן $C=-\frac{1}{2}$.
לכן $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$.

11. נתון ישר $l: \quad \frac{x-7}{2}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z+7}{-3}$ ונתונה נקודה $A(-1,2,5)$ מחוץ לישר.
נתון כי המישור $3x+By+Cz+D=0$ מכיל את הישר ואת הנקודה.
מצאו את D.

פתרון: על פי הנתון הנורמל למישור הנתון הוא $(3,B,C)$.

בנוסף, ההצגה הפרמטרית של הישר הנתון היא $l:(7,-5,-7)+t\,(2,-2,-3)$.

כיוון שהישר מוכל במישור, וקטור הכיוון של הישר ניצב לנורמל ולכן מתקיים כי $(2,-2,-3)\cdot(3,B,C)=0$.

בנוסף, הנקודות $A\,(-1,2,5)\,,B\,(7,-5,-7)$ נמצאות על המישור ולכן $\overrightarrow{AB}$ ניצב לנורמל ולכן $(8,-7,-12)\cdot(3,B,C)=0$.

קיבלנו מערכת משוואות: $24-7B-12C=0 \qquad 6-2B-3C=0,$.

נכפול את המשוואה הראשונה ב־4 ונחסר מהראשונה ונקבל כי $B=0$. ולכן $C=2$.

קיבלנו שמשוואת המישור היא $3x+2z+D=0$. נציב את הנקודה $(-1,2,5)$ ונקבל: $-3+10+D=0$ כלומר $D=-7$.

12. המשוואה $x^2+y^2+2y=k$ מתארת מעגל ברדיוס 5 שמרכזו בנקודה $(0,-1)$, כאשר k פרמטר ממשי.
קבעו את סוג העקום המתואר על ידי המשוואה $x^2+(k-20)\,x-y^2=k-4$.

פתרון: מתקיים כי $k=x^2+y^2+2y=x^2+(y+1)^2-1$ ולכן $x^2+(y+1)^2=k+1$.

כיוון שהמשוואה מתארת מעגל ברדיוס 5 נקבל כי $k+1=25$ לכן $k=24$.

לכן נקבל את המשוואה הבאה: $x^2+4x-y^2=20$, כלומר $(x+2)^2-y^2=24$ וזוהי משוואה של היפרבולה.

13. נתונות שתי פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. בחרו את הטענה הנכונה בהכרח.
פתרון: נעבור על הטענות:

(א) אם $f(x), g(x)$ פונקציות מונוטוניות עולות אז גם $f(x)+g(x)$ פונקציה מונוטונית עולה.
הטענה נכונה. אם $x_1 < x_2$ ו־$f(x)$מונוטוניות עולות אז
$f(x_1) \le f(x_2), g(x_1) \le g(x_2)$ ולכן $f(x_1)+g(x_1) \le f(x_2)+g(x_2)$

(ב) אם $f(x), g(x)$ פונקציות חד־חד ערכיות, אז גם $f(x)+g(x)$ פונקציה חד־חד ערכית.
הטענה לא נכונה. ניקח $f(x)=x$ ו־$g(x)=-x$. אלו פונקציות חח"ע.
מצד שני, $f(x)+g(x)=0$ היא לא פונקציה חח"ע.

(ג) אם $f(x), g(x)$ פונקציות על, אז גם $f(x)+g(x)$ פונקציה על.
הטענה לא נכונה. ניקח $f(x)=x$ ו־$g(x)=-x$. אלו פונקציות על.
מצד שני, $f(x)+g(x)=0$ היא לא פונקציה על.

(ד) אם $f(x), g(x)$ פונקציות הפיכות, אז גם $f(x)+g(x)$ פונקציה הפיכה.
הטענה לא נכונה. ניקח $f(x)=x$ ו־$g(x)=-x$. אלו פונקציות הפיכות.
מצד שני, $f(x)+g(x)=0$ היא לא פונקציה הפיכה.

(ה) אם $f(x), g(x)$ פונקציות מונוטוניות עולות, אז $f(x)g(x)$ פונקציה מונוטונית עולה.
הטענה לא נכונה. ניקח $f(x)=g(x)=x$. אלו פונקציות עולות.
מצד שני, $f(x)g(x)=x^2$ היא לא פונקציה עולה.

14. יהי k מספר שלם אי־שלילי. נתון כי שטח התחום החסום על ידי הגרפים של $f(x)=e^{kx}$, $g(x)=e^{-kx}$ והישר $y=e$ שווה ל־1. מצאו את k.
פתרון: מתקיים כי הפונקציות נחתכות בנקודה $(0,1)$.
בנוסף הפונקציה $f(x)$ חותכת את הישר $y=e$ ב־$x=\frac{1}{k}$ ו־$g(x)$ חותכת את הישר $y=e$ ב־$x=-\frac{1}{k}$.
לכן השטח הדרוש הוא:

$$1=\int_{-\frac{1}{k}}^{0}\left(e-e^{-kx}\right)dx+\int_{0}^{\frac{1}{k}}\left(e-e^{kx}\right)dx=\left(ex+\frac{1}{k}e^{-kx}\right)|_{-\frac{1}{k}}^{0}+\left(ex-\frac{1}{k}e^{kx}\right)|_{0}^{\frac{1}{k}}=$$

$$\frac{1}{k}-\frac{e}{k}+\frac{e}{k}+\frac{e}{k}-\frac{e}{k}+\frac{1}{k}=\frac{2}{k}$$

ולכן $k=2$.

15. נתונה הפונקציה $f(x)=10x-5x^4+ax^8-10x^9+x^{10}$ כאשר a פרמטר ממשי.
נתון כי מתקיים $f^{(8)}(1)=0$ כאשר $f^{(8)}(x)$ מציין את הנגזרת השמינית של $f(x)$.
מצאו את a.
פתרון: מתקיים כי הנגזרת השמינית של $f(x)$ היא:

$$f^{(8)}(x)=8!a-10\cdot 9\cdot\dots\cdot 2x+10\cdot 9\cdot\dots\cdot 3x^2=8!a-10!x+\frac{10!}{2}x^2$$

מתקיים כי $f^{(8)}(1)=0$ ולכן $\frac{10!}{2}=10!\left(1-\frac{1}{2}\right)=10!-\frac{10!}{2}=8!a$ ולכן $a=\frac{10\cdot 9}{2}=45$.

16. מצאו את תחום ההגדרה המקסימלי של הפונקציה $f\left(x\right)=\sqrt{\tan\left(4x\right)}+\ln\left(x-x^{2}\right)$.
פתרון: תחום ההגדרה של $\ln\left(x-x^{2}\right)$ הוא $\left(0,1\right)=\left\{ x\mid x-x^{2}>0\right\}$.
תחום ההגדרה של $\sqrt{\tan\left(4x\right)}$ הוא

$$\left\{ x\mid\tan\left(4x\right)\geq0\right\} =\left\{ x\mid\pi k\leq4x<\frac{\pi}{2}+\pi k\right\} =\left\{ x\mid\frac{\pi}{4}k\leq x<\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k\right\}$$

לכן חיתוך שני תחומי ההגדרה הוא: $\left(0,\frac{\pi}{8}\right)\cup[\frac{\pi}{4},1)$

17. מצאו את כל ערכי $m\in\mathbb{R}$, $m\neq2$ כך שלמשוואה $\frac{1}{m-2}x^{2}+3x+2\left(m-3\right)=0$ אין פתרון ממשי.
פתרון: כדי שלמשוואה לא יהיה פתרון ממשי, נדרוש שהדיסקרימיננטה Δ תהיה שלילית. מתקיים:

$$\Delta=9-\frac{8\left(m-3\right)}{m-2}=\frac{9m-18-8m+24}{m-2}=\frac{m+6}{m-2}$$

מתקיים כי $\Delta<0$ אם"ם $m+6>0,m-2<0$ או $m+6<0,m-2>0$.

במקרה הראשון נקבל כי $m\in\left(-6,2\right)$. במקרה השני אין פתרון.

לכן התשובה הסופית היא $m\in\left(-6,2\right)$.

18. יהיו $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ וקטורים במרחב המקיימים $|\overrightarrow{u}|=|\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|=2\sqrt{2}$. חשבו את $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$.

פתרון: מתקיים כי $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ הוא הצלע השלישית במשולש הנוצר על ידי $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ ועל פי הנתון זהו משולש שווה צלעות. לכן הזווית בין $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ היא $\frac{\pi}{3}$. לכן

$$|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|^{2}=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}^{2}+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^{2}=8+2\cdot2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+8=24$$

ולכן $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=\sqrt{24}$.

19. נתונה פונקציה גזירה $f\left(x\right)$ המקיימת $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$. חשבו את הגבול $\lim_{x\rightarrow\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{f(x)\sin x}$.
פתרון: נגדיר $g\left(x\right)=f\left(x\right)\sin x$. מתקיים כי $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)\sin x+f\left(x\right)\cos x$.
לכן $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.
מצד שני, על פי הגדרת הנגזרת מתקיים:

$$2=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\rightarrow\frac{\pi}{2}}\frac{g\left(x\right)-g\left(0\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\rightarrow\frac{\pi}{2}}\frac{f\left(x\right)\sin x-0}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\rightarrow\frac{\pi}{2}}\frac{f\left(x\right)\sin x}{\frac{1}{2}\left(2x-\pi\right)}=2\lim_{x\rightarrow\frac{\pi}{2}}\frac{f\left(x\right)\sin x}{2x-\pi}$$

ולכן $\lim_{x\rightarrow\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)\sin x}{2x-\pi}=1$.

20. חשבו את הגבול: $\lim_{x\to 1}\frac{2^x-2}{4^x-2^x-2}$.

פתרון: נסמן $t=2^x$. מתקיים כי כאשר $x\to 1$ אז $t\to 2$ לכן צריך לחשב את הגבול:

$$\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^2-t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{(t-2)(t+1)}=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{3}$$